



Aula 6. Testes de Hipóteses Paramétricos (I)

Teste de Hipóteses

Procedimento estatístico que averigua se os dados **sustentam uma hipótese** (conjectura sobre uma característica da população)

- Existem duas hipóteses:

- vs {
- **Hipótese Nula** — H_0
 - A hipótese nula H_0 deve ser sempre simples (com sinal de =)
 - **Hipótese Alternativa** — H_1

- Podem ser realizado dois tipos de testes:

- ou {
- unilaterais: H_1 apenas contempla possibilidades à direita ou à esquerda de H_0
 $H_0 : \mu = 1$ vs $H_1 : \mu > 1$ (unilateral à direita) $H_0 : \mu = 1$ vs $H_1 : \mu < 1$ (unilateral à esquerda)
 - bilaterais: H_1 contempla possibilidades à direita ou à esquerda de H_0
 $H_0 : \mu = 1$ vs $H_1 : \mu \neq 1$ (bilateral)

- Existem dos tipos de decisão:

- ou {
- Rejeitar a hipótese nula H_0
 - Não rejeitar a hipótese nula H_0



Definições básicas

- Estatística de teste **T**: estatística calculada a partir da amostra e usada para tomar a decisão
- Região de rejeição ou região crítica **RC**: conjunto de valores da estatística de teste que nos levam a rejeitar H_0
- Nível de significância ou tamanho do teste **α** :
$$\alpha = P(\text{Erro de tipo I}) = P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeiro})$$

normalmente $\alpha=0.1$, $\alpha=0.05$ ou $\alpha=0.01$
- Potência do teste **$1 - \beta$** :
$$1 - \beta = 1 - P(\text{Erro de tipo II}) = P(\text{não rejeitar } H_0 | H_1 \text{ verdadeiro})$$
- p-value: a probabilidade de observar um valor da estatística de teste tanto ou mais afastado que o valor observado na amostra, assumindo que H_0 é verdadeira

Exemplo de TH para a média μ

População Normal

Máquina de encher pacotes de açúcar. O peso de cada pacote deve ser $\approx 8\text{g}$ (isto é, $\mu = 8$). Será que a máquina está a funcionar correctamente?

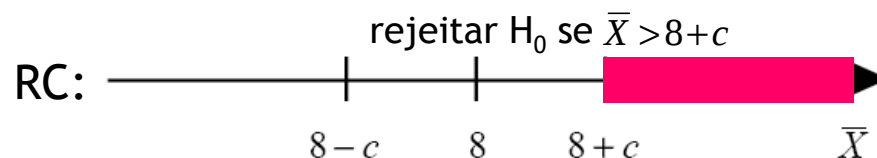
X - v.a. que representa o peso de um pacote de açúcar $\longrightarrow X \sim N(8, \sigma^2)$

Observa-se uma a.a. com n observações $\Rightarrow$ decidir em base à media amostral $\bar{X}$

Como decidir entre teste unilateral ou bilateral?

I. Ponto de vista do fabricante:

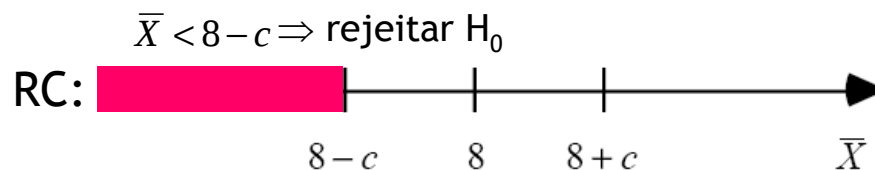
$$H_0 : \mu = 8 \text{ vs. } H_1 : \mu > 8$$



Se rejeitar H_0 parar a produção para afinar a máquina, pois a máquina está a encher demais

II. Ponto de vista do consumidor:

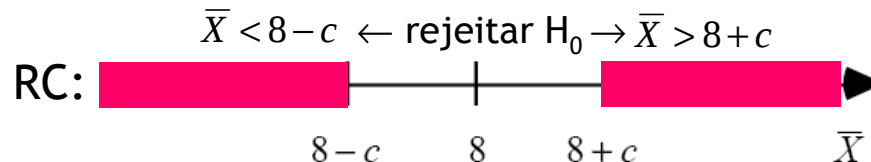
$$H_0 : \mu = 8 \text{ vs. } H_1 : \mu < 8$$



Se rejeitar H_0 não aceitar a encomenda, pois a máquina está a encher de menos

III. Compromisso entre fabricante e consumidor

$$H_0 : \mu = 8 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq 8$$





Procedimentos

Existem 3 procedimentos para realizar um teste de hipótese ao nível de significância α :

1. Com base na região crítica RC

Rejeitar H_0 se o valor t_{obs} encontra-se na RC

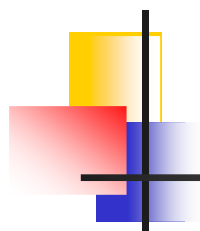
(t_{obs} - o valor da estatística do teste para os dados observados)

2. Através do p-value

Rejeitar H_0 se $p\text{-value} \leq \alpha$

3. Através de intervalos de confiança (válido apenas para testes bilaterais)

Rejeitar H_0 se o valor do parâmetro especificado em H_0 não pertencer ao intervalo de confiança



Procedimento usando RC

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar H_0 e H_1
2. Escolher uma estatística de teste, T , com distribuição conhecida
(admitindo que H_0 é verdadeira)
3. Identificar a região de rejeição RC
4. Calcular t_{obs} - o valor que T assume para os dados observados
5. Tomar decisão: **rejeitar H_0 se o valor t_{obs} encontra-se na RC**
6. Concluir

TH para μ com variância conhecida

População Normal

μ desconhecido, mas σ^2 conhecido

Teste de Hipóteses com nível de significância (tamanho) α

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu \neq \mu_0$$

teste bilateral

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu < \mu_0$$

teste unilateral (inferior)

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu > \mu_0$$

teste unilateral (superior)

Estatística do Teste:

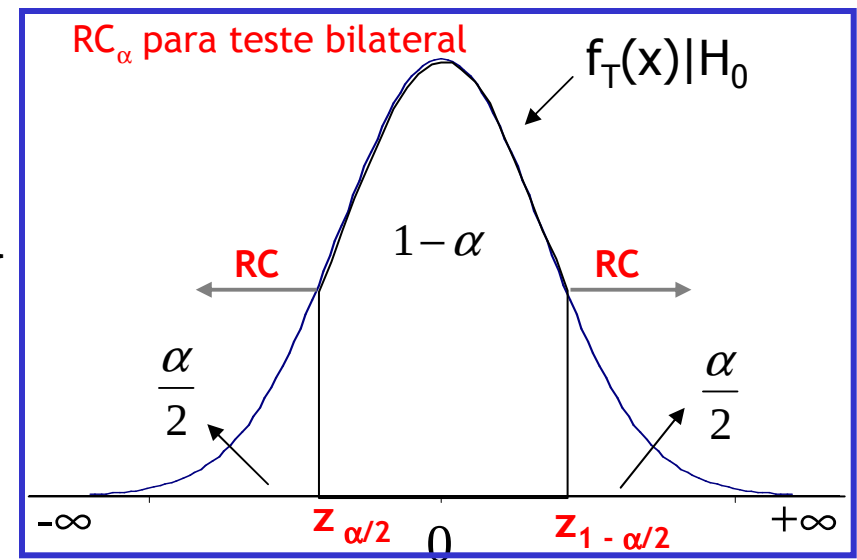
$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$$

Região de Rejeição (Região Crítica (RC)) :

$$H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ t \in \mathfrak{R} : |t| > z_{1-\alpha/2} \}$$

$$H_1 : \mu < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ t \in \mathfrak{R} : t < z_\alpha \}$$

$$H_1 : \mu > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ t \in \mathfrak{R} : t > z_{1-\alpha} \}$$



IC e TH para μ com variância conhecida

População Normal

exercício 1.1, capítulo 4

Uma refinaria de petróleo possui um parque de enchimento que lhe permite encher, por dia, uma **média de 30 tanques** com um **desvio padrão de 6 tanques**. Modificando o processo de enchimento observou-se o parque durante **36 dias** e registou-se uma **média amostral de 34 tanques**. Admite-se que os valores obtidos pelo novo processo de enchimento são bem modelados pela distribuição Normal sem alteração no desvio padrão

1. Determine um IC a 95% para o valor médio do novo processo de enchimento

Para grau de confiança 95%:

$$IC_{(1-\alpha)}(\mu) = \left(\bar{X} - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$(1-\alpha) \times 100\% = 95\% \Rightarrow (1-\alpha) = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975$

$z_{0.975} = 1.96$

IDF.Normal(0.975, 0, 1) em SPSS

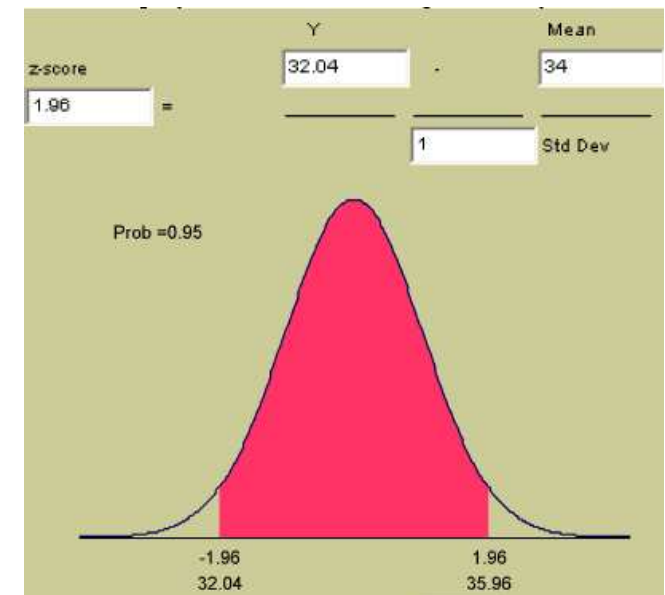
$$IC_{95\%}(\mu) = \left(\bar{X} - z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{0.975} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Substituindo por $\bar{X} = 34$, $\sigma = 6$, $n = 36$

$$IC_{95\%}(\mu) = \left(34 - 1.96 \frac{6}{\sqrt{36}}, 34 + 1.96 \frac{6}{\sqrt{36}} \right)$$

$$IC_{95\%}(\mu) = (34 - 1.96, 34 + 1.96)$$

$$IC_{95\%}(\mu) = (32.04, 35.96)$$



IC e TH para μ com variância conhecida

População Normal

exercício 1.2, capítulo 4

1.2. Para $\alpha = 0.05$, conclua se é razoável admitir uma alteração do valor médio, efectuando um teste de hipóteses com base na região crítica

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1

Parâmetro de interesse - μ , nível de significância - $\alpha = 0.05$

$$H_0 : \mu = 30 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq 30$$

teste bilateral

2. Escolher uma estatística do teste T com distribuição conhecida admitindo que H_0 é verdadeira

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$$

Substituindo por $\mu_0 = 30$, $\sigma = 6$, $n = 36$

$$T = \frac{\bar{X} - 30}{\frac{6}{\sqrt{36}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$$

IC e TH para μ com variância conhecida População Normal

exercício 1.2, capítulo 4 (cont...)

3. Identificar a região de rejeição (região crítica RC)

$$\text{se } H_1: \mu \neq 30 \Rightarrow RC_{\alpha} = \{ t \in \mathcal{R} : |t| > Z_{1-\alpha/2} \}$$

$$\text{se } \alpha=0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2=0.975$$

$$RC_{\alpha} = \{ t \in \mathcal{R} : |t| > Z_{0.975} \} \quad \longrightarrow \quad RC_{\alpha} = \{ t \in \mathcal{R} : |t| > 1,96 \}$$

$$Z_{0.975} = 1.96$$

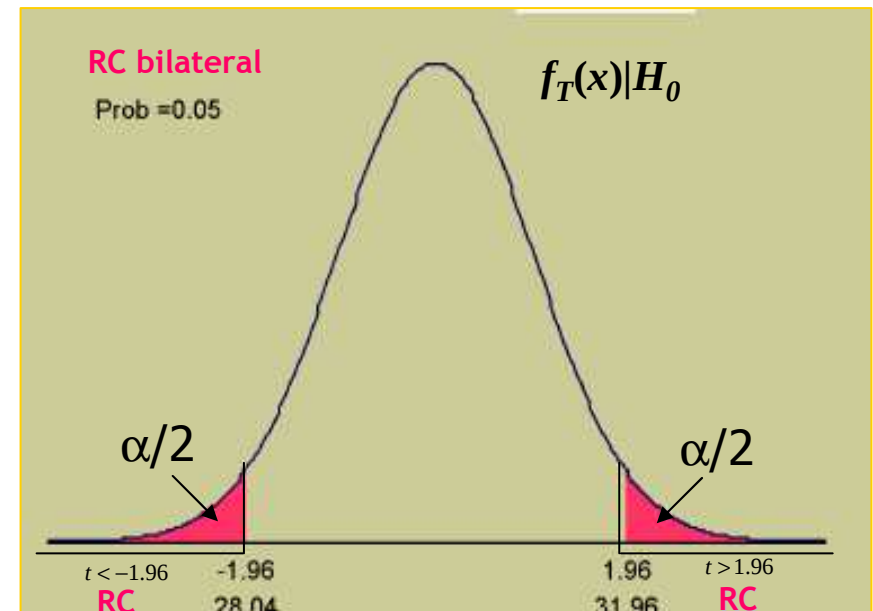
4. Calcular t_{obs} (valor de T para os dados observados)

Substituindo por $\bar{X} = 34$

$$t_{obs} = \frac{\bar{X} - 30}{\frac{6}{\sqrt{36}}} = \frac{34 - 30}{1} = 4$$

5 e 6. Tomar decisão e Concluir

Como $t_{obs}=4 > 1.96$ (encontra-se na região crítica)
rejeita-se H_0 a favor de H_1 . Logo, ao nível de
significância $\alpha=0.05$ rejeita-se a hipótese de a
média ser 30 e conclui-se que:
houve alteração ao valor médio



Procedimento usando o p-value

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar H_0 e H_1
2. Escolher uma estatística de teste, T , com distribuição conhecida e calcular t_{obs} para os dados observados
3. Determinar o **p-value** do teste
 - se teste unilateral à direita: $\text{p-value} = P(T > t_{obs} | H_0)$
 - se teste unilateral à esquerda: $\text{p-value} = P(T < t_{obs} | H_0)$
 - se teste bilateral:
$$\text{p-value} = \begin{cases} 2P(T < t_{obs} | H_0) & \text{se } t_{obs} \text{ for reduzido} \\ 2P(T > t_{obs} | H_0) & \text{se } t_{obs} \text{ for elevado} \end{cases}$$

t_{obs} é reduzido (elevado) se a estimativa que se obtém para o parâmetro a testar é inferior (superior) ao valor especificado em H_0
4. Tomar decisão: **rejeitar H_0 se $\text{p-value} \leq \alpha$ (nível de significância)**
5. Concluir

IC e TH para μ com variância conhecida

População Normal

exercício 1.3, capítulo 4

1.3. Determine o p-value do teste efectuado e confirme as conclusões a que chegou

1. Calcular o p-value:

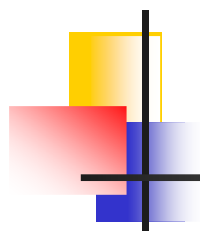
1. Teste bilateral $\Rightarrow$ RC é bilateral com igual probabilidade para os dois lados

2. t_{obs} é elevado $\Rightarrow \bar{X} = 34 > \mu = 30$

$$\begin{aligned} \text{p-value} &= 2 P(T > t_{obs} | H_0) = 2 P(T > 4 | H_0) = 2 (1 - P(T < 4 | H_0)) \\ &= 2 \times (1 - \text{CDF.NORMAL}(4, 0, 1)) \quad (\text{calcular em SPSS}) \\ &= 2 \times (1 - 0,99997) = 6,33 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

2. Tomar decisão e concluir

Como $\text{p-value} = 6,33 \times 10^{-5} < \alpha = 0.05$ rejeita-se H_0 a favor de H_1 .
Logo, confirma-se a rejeição de a hipótese de a média ser 30 e
conclui-se que:
houve alteração ao valor médio



Procedimento usando IC

(válido apenas para testes bilaterais)

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar H_0 e H_1
2. Construir um intervalo de confiança para o parâmetro
3. Tomar decisão:
Rejeitar H_0 se o valor do parâmetro especificado em H_0 não pertencer ao intervalo de confiança
4. Concluir

IC e TH para μ com variância conhecida População Normal

exercício 1.4, capítulo 4

1.4. Poderia chegar à mesma conclusão através do IC calculado em 1.1.?

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1

Parâmetro de interesse - μ , nível de significância - $\alpha = 0.05$

$H_0 : \mu = 30$ vs. $H_1 : \mu \neq 30$ teste bilateral

2. Construir um intervalo de confiança para μ

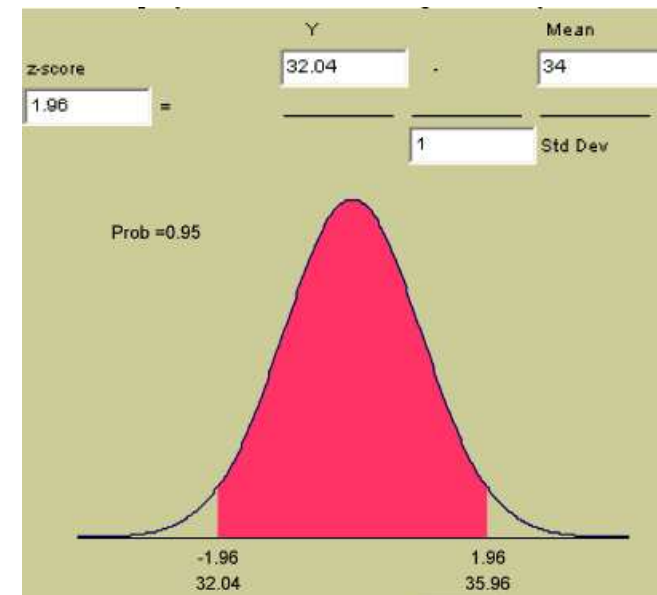
Para $\bar{X} = 34$, $\sigma = 6$, $n = 36$

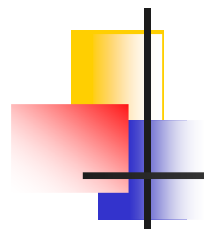
$$IC_{95\%}(\mu) = \left(34 - 1,96 \frac{6}{\sqrt{36}}, 34 + 1,96 \frac{6}{\sqrt{36}} \right)$$

→ $IC_{95\%}(\mu) = (32.04, 35.96)$

3. Tomar decisão e concluir

Rejeita-se H_0 a favor de H_1 se o valor do parâmetro especificado, $\mu = 30$, não pertencer ao intervalo de confiança. Como neste caso não pertence, confirma-se a rejeição de a hipótese de a média ser 30 e conclui-se que:
houve alteração ao valor médio





TH para μ com variância desconhecida

População Normal

μ desconhecido, σ^2 desconhecido

Teste de Hipóteses com nível de significância (tamanho) α

$H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ teste bilateral

$H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu < \mu_0$ teste unilateral (inferior)

$H_0 : \mu = \mu_0$ vs. $H_1 : \mu > \mu_0$ teste unilateral (superior)

Estatística do Teste:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n-1}$$

Região de Rejeição (Região Crítica (RC)) :

se $H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ t \in \mathfrak{R} : |t| > t_{1-\alpha/2, n-1} \}$

se $H_1 : \mu < \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ t \in \mathfrak{R} : t < t_{\alpha, n-1} \}$

se $H_1 : \mu > \mu_0 \Rightarrow RC_\alpha = \{ t \in \mathfrak{R} : t > t_{1-\alpha, n-1} \}$

TH para μ com variância desconhecida

População Normal

exercício 10, capítulo 4

Determinada empresa de segurança foi contactada para uma eventual prestação de serviços no Euro 2004 e o Gerente tratou de assegurar ao potencial cliente que na sua empresa os seus seguranças estão muito preparados fisicamente mas conseguem passar despercebidos pois o **peso médio deles inferior a 68 kg**.

Selecionou ao acaso **50 guardas** e registou-se os seus pesos.

A amostra está disponível no ficheiro **PesosSeg.sav**

1. Poderá considerar que o peso de um guarda escolhido ao acaso tem distribuição Normal?

Por forma a averiguar se a distribuição dos pesos é Normal construi-se um **QQ-plot** (com o SPSS)

2. Teste ao nível de significância de 5% se a afirmação do gerente foi imprudente

Por forma a averiguar se a afirmação do gerente foi imprudente realiza-se um **teste paramétrico para μ com população Normal e variância desconhecida**

Parâmetro de interesse - μ , nível de significância - $\alpha = 0.05$

$H_0 : \mu = 68 \text{ kg}$ vs. $H_1 : \mu > 68 \text{ kg}$ teste unilateral superior

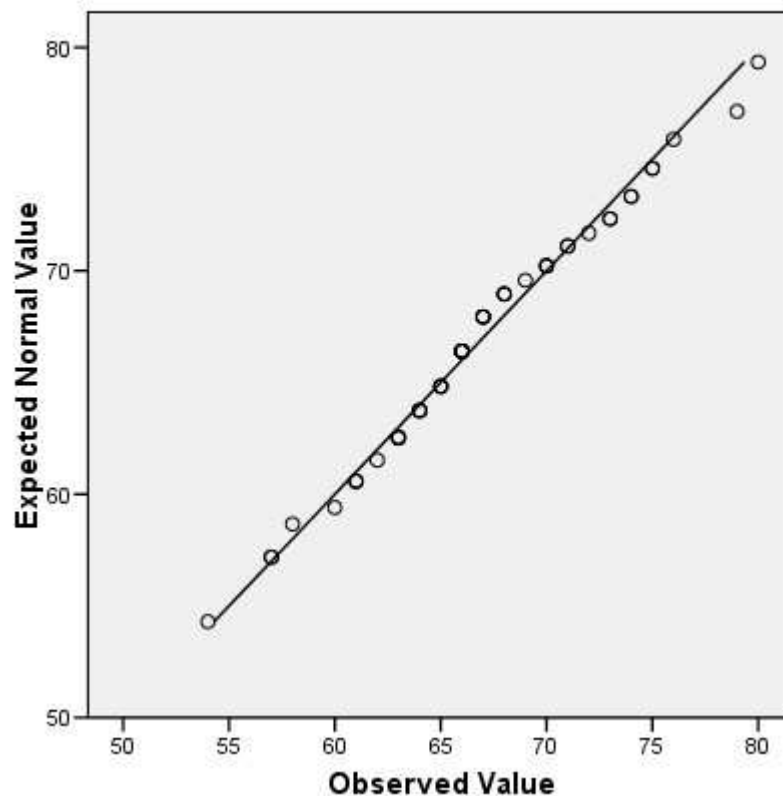
1. Construindo o QQ Plot em SPSS

The screenshot shows the SPSS Data Editor interface with the 'Q-Q Plots' dialog box open. The dialog box is titled 'Q-Q Plots' and has a blue header bar. The 'Variables:' list contains 'Peso de um seguranç...'. The 'Test Distribution' is set to 'Normal'. The 'Distribution Parameters' section has 'Estimate from data' checked. The 'Transform' section has 'Natural log transform', 'Standardize values', and 'Difference' unchecked. The 'Proportion Estimation Formula' section has 'Blom's' selected. The 'Rank Assigned to Ties' section has 'Mean' selected. The 'OK' button is highlighted with a red circle. The background shows the SPSS Data Editor with a dataset named 'PesosSeg.sav' and a list of values for 'peso'.

	peso
1	63
2	66
3	76
4	66
5	73
6	75
7	72
8	57
9	79
10	66
11	68
12	64
13	63
14	65
15	61
16	60
17	67
18	80
19	67
20	65
21	65

1. Construindo o QQ Plot em SPSS

Normal Q-Q Plot of Peso de um segurança



1. Poderá considerar que o peso de um guarda escolhido ao acaso tem distribuição Normal?

Sim, uma vez que os quantis de uma distribuição Normal se sobrepõem aos quantis da amostra (os pontos se dispõem em torno de uma recta)

2. TH para μ com variância desconhecida

População Normal

exercício 10.2, capítulo 4

I-Procedimento com base na região de rejeição

1. Identificar o parâmetro de interesse e especificar as hipóteses H_0 e H_1

Parâmetro de interesse - μ , nível de significância - $\alpha = 0.05$

$$H_0 : \mu = 68 \text{ kg vs. } H_1 : \mu > 68 \text{ kg} \quad \text{teste unilateral (superior)}$$

2. Escolher uma estatística do teste T com distribuição conhecida admitindo que H_0 é verdadeira

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S_c}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n-1}$$

3. Identificar a região de rejeição (região crítica RC)

$$RC_\alpha = \{ t \in \mathfrak{R} : t > t_{1-\alpha, n-1} \}$$



$$RC_\alpha = \{ t \in \mathfrak{R} : t > 1,68 \}$$

se $\alpha=0.05 \Rightarrow 1-\alpha = 0.95$

graus de liberdade $\Rightarrow n-1 = 49$



$$t_{0.95, 49} \approx 1.68$$

$$\text{IDF.T (0.95, 49)=1.68}$$

2. TH para μ com variância desconhecida População Normal

exercício 10.2, capítulo 4 (cont...)

4. Calcular t_{obs} (valor de T para os dados observados)

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Peso de um segurança	50	54	80	66,82	5,583
Valid N (listwise)	50				

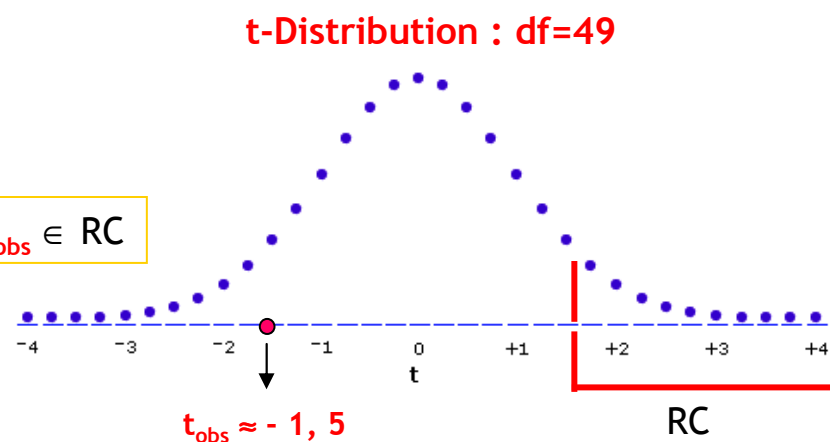
Calcular media amostral e desvio padrão usando o SPSS

$$t_{obs} = \frac{\bar{X} - 68}{\frac{S_c}{\sqrt{50}}} = \frac{66,82 - 68}{\frac{5,583}{\sqrt{50}}} = -1,4945$$

5. Tomar decisão e concluir

$$RC_{\alpha} = \{ t \in \mathcal{R} : t > 1,68 \} \rightarrow \text{rejeitar } H_0 \text{ se } t_{obs} \in RC$$

Como $t_{obs} = -1,4945 < 1,68 \Rightarrow t_{obs}$ não pertence à região de rejeição, logo não se rejeita H_0



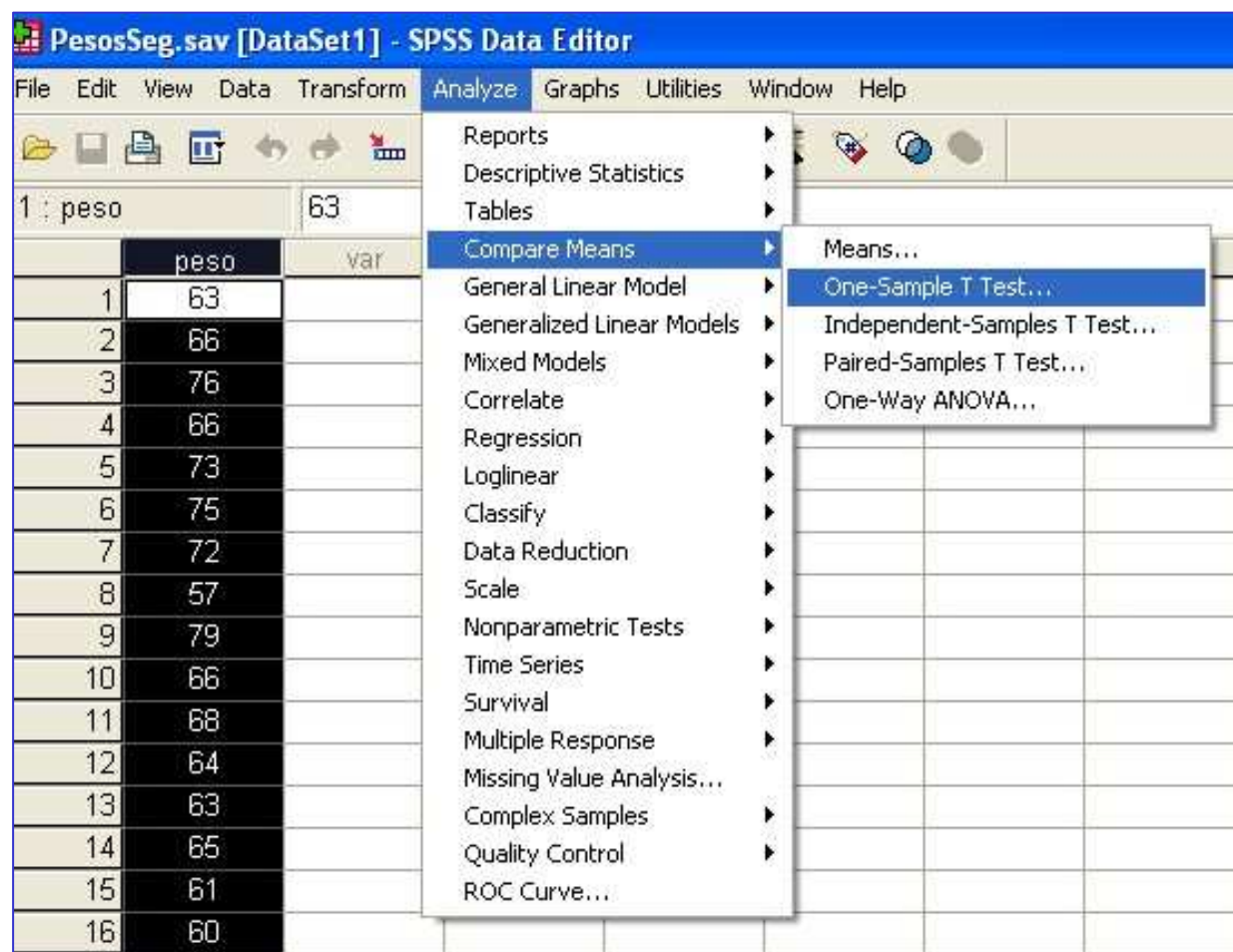
6. Concluir

Ao nível de significância de **5%** não há razões para considerar que a afirmação do gerente for imprudente

2. TH para μ com variância desconhecida População Normal

exercício 10.2, capítulo 4 (cont...)

II - Procedimento com base no p-value usando o SPSS



2. TH para μ com variância desconhecida População Normal

exercício 10.2, capítulo 4 (cont...)

II - Procedimento com base no p-value usando o SPSS

The image shows a screenshot of the SPSS software interface. In the background, a data editor window displays a list of 20 values under the variable 'peso': 63, 66, 76, 66, 73, 75, 72, 57, 79, 66, 68, 64, 63, 65, 61, 60, 67, 80, 67, 65. Overlaid on this are two dialog boxes. The top dialog is 'One-Sample T Test', where the 'Test Variable(s)' field contains 'Peso de um segurança' and the 'Test Value' field is set to 68. The bottom dialog is 'One-Sample T Test: Options', where the 'Confidence Interval' is set to 95% and the 'Exclude cases analysis by analysis' option is selected. Red arrows point from text boxes to the 'Test Value' and 'Confidence Interval' fields.

One-Sample T Test

Test Variable(s):
Peso de um segurança

Test Value: 68

One-Sample T Test: Options

Confidence Interval: 95 %

Missing Values

☒ Exclude cases analysis by analysis

☐ Exclude cases listwise

Aqui devemos indicar
o valor do teste
 $\mu_0 = 68$

Aqui devemos indicar
o nível de
confidência

2. TH para μ com variância desconhecida População Normal

exercício 10.2, capítulo 4 (cont...)

II - Procedimento com base no p-value usando o SPSS

One-Sample Test

	Test Value = 68					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Peso de um segurança	-1,494	49	,141	-1,180	-2,77	,41

Intervalo de Confiança

t_{obs} - valor da estatística T para os dados observados

p-value para teste bilateral

Para transformar um **p-value bilateral** em **unilateral** divide-se por dois desde que a amostra aponte no sentido da hipótese alternativa. Caso contrário, calcula-se $1-(p\text{-value}/2)$

Como a amostra não aponta no sentido da hipótese alternativa :

$$\begin{aligned} p\text{-value}_{(unilateral)} &= 1 - p\text{-value}_{(bilateral)} / 2 \\ &= 1 - 0,141 / 2 \\ &= 0,9295 \end{aligned}$$

Como **p-value = 0,9295** > $\alpha = 0.05$
não se rejeita-se H_0
Logo, confirma-se que não há razões para considerar que a afirmação do gerente for imprudente

2. TH para μ com variância desconhecida

População Normal

exercício 10.2, capítulo 4 (cont...)

Calculando o p-value usando o SPSS e a tabela de Distribuição t-Student

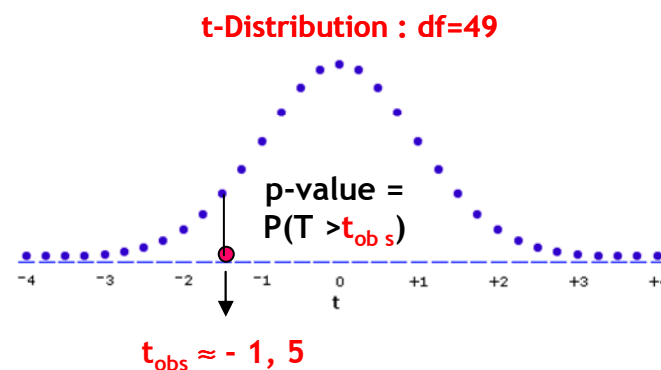
se teste unilateral à direita: $\text{p-value} = P(T > t_{\text{obs}} | H_0)$

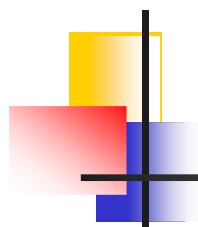
$$\begin{aligned} \text{p-value} &= P(T > t_{\text{obs}} | H_0) = P(T > -1.494) = 1 - P(T \leq -1.494) \\ &= 1 - F(-1.494) = F(1.494) = \text{CDF.T}(1.494, 49) = 0.9292 \end{aligned}$$

F(z)	Number of Degrees of Freedom						
	22	24	26	28	30	40	50
0.5	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.6	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
0.7	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53
0.8	0.86	0.86	0.86	0.86	0.85	0.85	0.85
0.9	1.32	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30
0.95	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.68	1.68
0.975	2.07	2.06	2.06	2.05	2.04	2.02	2.01
0.99	2.51	2.49	2.48	2.47	2.46	2.42	2.40
0.995	2.82	2.80	2.78	2.76	2.75	2.70	2.68
0.999	3.51	3.47	3.44	3.41	3.39	3.31	3.26

O p-value está situado entre 0.9 e 0.95

Como $\text{p-value} = 0,9292 > \alpha = 0.05$
não se rejeita-se H_0





Referências

Livro: Grande Maratona de Estatística no SPSS
Andreia Hall, Cláudia Neves e António Pereira
Capítulo 4.2. Testes de Hipóteses Paramétricos

Acetatos:

- Testes de Hipóteses I
Andreia Hall
URL: <http://www2.mat.ua.pt/pessoais/AHall/me/files/TH2006.pdf>
- Capítulo 8. Testes de Hipóteses
Ana Pires, IST Lisboa
disciplina: Probabilidades e Estatística.
URL: : <http://www.math.ist.utl.pt/~apires/materialpe.html>