

Aula 7. Testes de Hipóteses Paramétricos (II)

IC e TH para comparação de valores médios μ_X e μ_Y de duas populações Normais. Amostras independentes

Temos duas amostras aleatórias $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$ independentes e provenientes de duas populações Normais $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Caso 1: variâncias conhecidas

Estatística do Teste de Hipóteses

IC para $\mu_X - \mu_Y$ a grau de confiança $1 - \alpha$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}$$

Caso 2: variâncias desconhecidas mas iguais

Estatística do Teste de Hipóteses

IC para $\mu_X - \mu_Y$ a grau de confiança $1 - \alpha$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p} \sim t_{n+m-2}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n+m-2} S_p$$

$$\text{onde } S_p = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \sqrt{\frac{(n-1)S_{cX}^2 + (m-1)S_{cY}^2}{n+m-2}}$$



IC e TH para comparação de valores médios μ_X e μ_Y de duas populações Normais. Amostras independentes

Caso 1: variâncias conhecidas

$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$ vs. $H_1: \mu_X - \mu_Y \neq 0$ teste bilateral

$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$ vs. $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0$ teste unilateral (inferior)

$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$ vs. $H_1: \mu_X - \mu_Y > 0$ teste unilateral (superior)

Estatística do Teste:

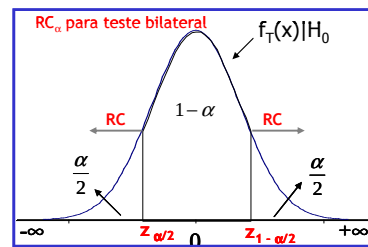
$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} \sim N(0, 1)$$

Região de Rejeição (Região Crítica (RC):

se $H_1: \mu_X - \mu_Y \neq 0 \Rightarrow RC_\alpha = \{t \in \Re: |t| > z_{1-\alpha/2}\}$

se $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0 \Rightarrow RC_\alpha = \{t \in \Re: t < z_\alpha\}$

se $H_1: \mu_X - \mu_Y > 0 \Rightarrow RC_\alpha = \{t \in \Re: t > z_\alpha\}$



TH para comparação de valores médios μ_X e μ_Y de duas populações Normais. Amostras independentes

Caso 2: variâncias desconhecidas mas iguais

$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$ vs. $H_1: \mu_X - \mu_Y \neq 0$ teste bilateral

$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$ vs. $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0$ teste unilateral (inferior)

$H_0: \mu_X - \mu_Y = 0$ vs. $H_1: \mu_X - \mu_Y > 0$ teste unilateral (superior)

Estatística do Teste:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_p} \sim t_{n+m-2}$$

Região de Rejeição (Região Crítica (RC):

se $H_1: \mu_X - \mu_Y \neq 0 \Rightarrow RC_\alpha = \{t \in \Re: |t| > t_{1-\alpha/2, (n+m-2)}\}$

se $H_1: \mu_X - \mu_Y < 0 \Rightarrow RC_\alpha = \{t \in \Re: t < t_{\alpha, (n+m-2)}\}$

se $H_1: \mu_X - \mu_Y > 0 \Rightarrow RC_\alpha = \{t \in \Re: t > t_{1-\alpha, (n+m-2)}\}$



Procedimentos

Existem 3 procedimentos para realizar um teste de hipótese ao nível de significância α :

1. Com base na região crítica RC
Rejeitar H_0 se o valor t_{obs} encontra-se na RC
(t_{obs} - o valor da estatística do teste para os dados observados)
2. Através do p-value
Rejeitar H_0 se **p-value $\leq \alpha$**
3. Através de intervalos de confiança (válido apenas para testes bilaterais)
Rejeitar H_0 se o valor do parâmetro especificado em H_0 não pertencer ao intervalo de confiança



IC e TH para comparação de valores médios μ_X e μ_Y de duas populações Normais. Amostras independentes

Caso 2: variâncias desconhecidas mas iguais

Exemplo 4.10, pag 179

O melhor amigo de Rocha trabalha numa fábrica de componentes de automóveis. A linha de produção dos discos de travão possui **8 máquinas** numeradas de 1 a 8. Pretende-se saber se há evidências para afirmar que **as máquinas com numeração inferior ou igual a 4 produzem discos de diâmetro médio significativamente diferente dos restantes**. Os diâmetros de uma amostra de discos de travão aí produzidos encontram-se no ficheiro **Travões.sav**.

X - diâmetro de disco de travão produzido nas máquinas 1-4 $\Rightarrow X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$

Y - diâmetro de disco de travão produzido nas máquinas 5-8 $\Rightarrow Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Para testar se as máquinas com numeração inferior ou igual a 4 produzem discos de diâmetro médio significativamente diferente dos restantes podemos implementar um teste de hipótese para comparação de valores médios de duas amostras independentes

$$H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0 \text{ vs. } H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0 \quad \longleftrightarrow \quad H_0 : \mu_X = \mu_Y \text{ vs. } H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$$



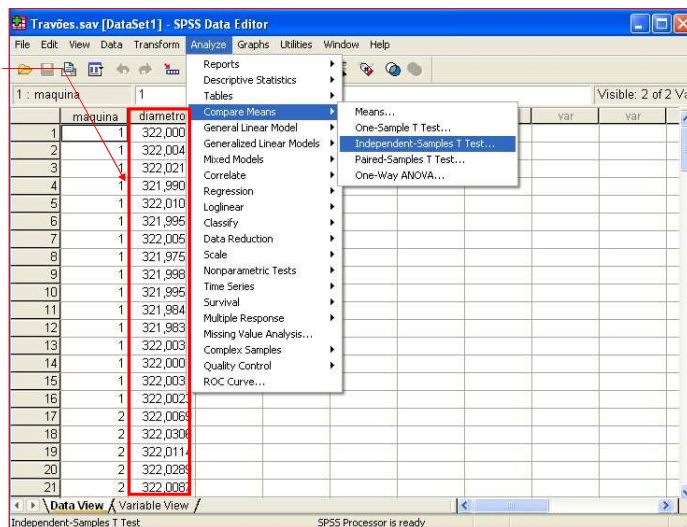
Procedimento usando SPSS

Analyze → Compare Means → Independent Samples T Test

Caso 2: variâncias desconhecidas mas iguais

Exemplo 4.10, pag 179

Os dados das duas amostras (ou grupos) devem estar dispostos numa só coluna devendo existir uma outra coluna que identifique a amostra (neste caso a coluna "maquina")

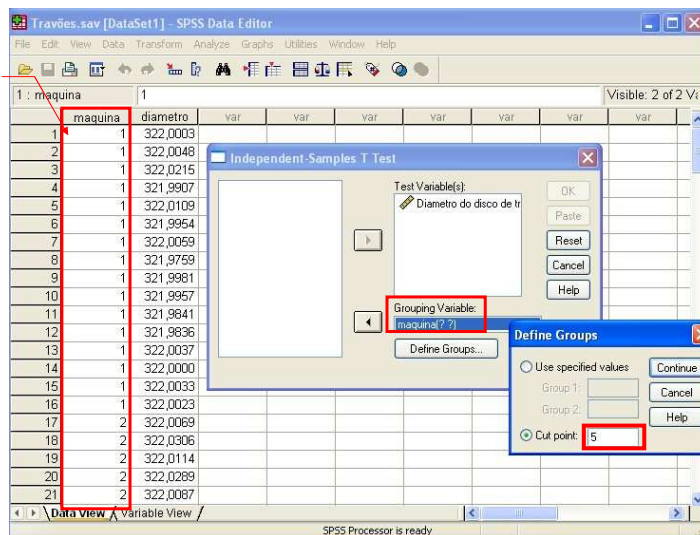


Procedimento usando SPSS

Analyze → Compare Means → Independent Samples T Test

Exemplo 4.10, pag 179

Os grupos podem ser discriminados por um "cut point" Usando como cut-point "máquina = 5" podemos dividir a amostra dos diâmetros em duas amostras independentes



Procedimento usando SPSS

Analyze → Compare Means → Independent Samples T Test

Exemplo 4.10, pag 179

Para poder realizar este teste temos de validar as hipóteses inerentes:

1. Todas as observações são independentes e apresentam-se numa escala de razões ou intervalos
 - Os diâmetros são representados numa escala de razões e admite-se que a recolha de observações foi feita em condições de independência e igualdade de condições
2. Ambas as amostras provêm de populações normalmente distribuídas
 - Construir **QQ-plot** para cada amostra
3. Existe homogeneidade de variâncias
 - Usar **teste de Levene** (fornecido pelo próprio SPSS)

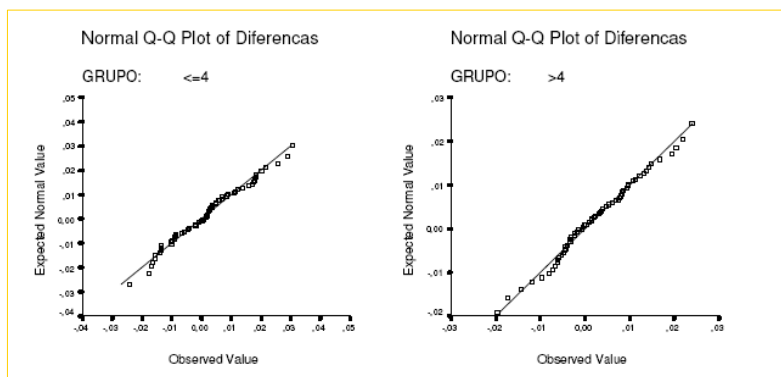
$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \text{ vs. } H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Procedimento usando SPSS

Analyze → Compare Means → Independent Samples T Test

Exemplo 4.10, pag 179

Construir QQ-plot para cada amostra dividendo os dados em 2 grupos



Os QQ-plots construídos com base nas diferenças ($x_i - 322$) parecem confirmar a distribuição Normal como subjacente aos dados

Procedimento usando SPSS

Analyze → Compare Means → Independent Samples T Test

Exemplo 4.10, pag 179

Group Statistics				
	Numero da maquina	N	Mean	Std. Deviation
Diametro do disco de travao	>= 5	64	322,0024	,0092511
	< 5	64	322,0016	,0122566

Teste bilateral

$H_0 : \mu_X = \mu_Y$ vs. $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$

Grau de Confiança: 95%

Nível de Significância: $\alpha = 0.05$

Resultados para o teste de Levene

Independent Samples Test

Resultados para o T teste

		Levene's Test for Equality of Variances		t-Test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
Diametro do disco de travao	Equal variances assumed	3,414	,067	,402	126	,688	,0007713	,0019195	-,0030273	,0045700
	Equal variances not assumed			,402	117,193	,689	,0007713	,0019195	-,0030301	,0045727

O SPSS fornece dois conjuntos de resultados: um assumindo a igualdade de variâncias e outro que admite a não igualdade de variância

Para o teste de Levene: (igualdade das variâncias ?)
p-value=0.067 > $\alpha = 0.05$
⇒ não rejeitar a hipótese nula
⇒ considerar iguais variâncias

Para o T teste (igualdade das médias ?)
p-value=0.688 > $\alpha = 0.05$
⇒ não rejeitar a hipótese nula
⇒ considerar iguais médias
CONCLUIR:
considerar o diâmetro médio dos dois grupos iguais

IC e TH para comparação de valores médios μ_X e μ_Y de duas populações Normais. Amostras emparelhadas

1. Temos duas amostras emparelhadas $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$ provenientes de duas populações Normais $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ e $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Amostras emparelhadas: se pares de observações (x_i, y_i) são dependentes sendo todos os restantes pares (x_i, y_j) , $i \neq j$ independentes

2. A amostra de diferenças $D_i = X_i - Y_i$, $i=1, \dots, n$ constitui uma amostra aleatória de observações registadas numa escala de razões ou intervalos

$H_0 : \mu_D = 0$ vs. $H_1 : \mu_D \neq 0$

teste bilateral

$H_0 : \mu_D = 0$ vs. $H_1 : \mu_D < 0$

teste unilateral (inferior)

$H_0 : \mu_D = 0$ vs. $H_1 : \mu_D > 0$

teste unilateral (superior)

Estadística do Teste de Hipóteses

IC para $\mu_X - \mu_Y$ a grau de confiança $1-\alpha$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{S_{cD} / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} S_{cD} / \sqrt{n}$$

sendo S_{cD} o desvio padrão amostral corrigido das diferenças $D_i = X_i - Y_i$

IC e TH para comparação de valores médios μ_X e μ_Y de duas populações Normais. Amostras emparelhadas

Exemplo 4.14, pag 184

A empresa onde o Rocha trabalha lançou recentemente no mercado uma dieta de emagrecimento e pretende fazer o controlo do peso dos seus seguidores. Para tal procedeu-se à recolha dos pesos de 16 indivíduos escolhidos aleatoriamente entre os seus seguidores, obtidos no início e após a dieta. Pretende-se obter um **intervalo de confiança a 99% para a diferença** dos pesos médios antes e depois da dieta bem como **testar se a diferença dos pesos médios (peso inicial- peso final) é positiva**.

Os dados sobre os pesos iniciais e finais encontram-se no ficheiro **EstudoDieta.sav**.

Para poder construir o IC e o TH temos de validar as hipóteses inerentes:

1. Amostras emparelhadas?

SIM, o mesmo indivíduo dá origem a duas observações: **peso inicial** e **peso final**

X - peso inicial de um indivíduo, Y - peso final de um indivíduo

$D = X - Y$ - diferença entre peso inicial e peso final

2. Amostras aleatórias de observações registadas numa escala de razões?

- ✓ As amostras são aleatórias pois os indivíduos foram escolhidos aleatoriamente
- ✓ As observações se registam numa escala de razões pois são medidas de pesos

3. A população da diferença D pode se considerar Normal?

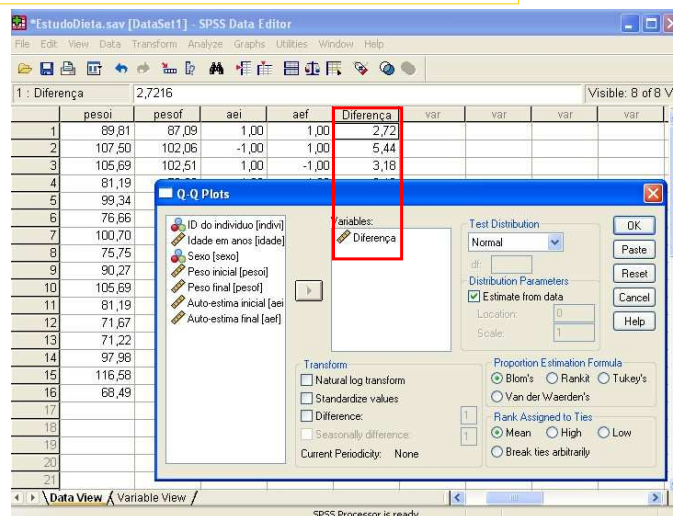
- ✓ Construir o QQ-plot para as diferenças

Procedimento usando SPSS

Analyze → Descriptive Statistics → QQ-plot

Exemplo 4.14, pag 184

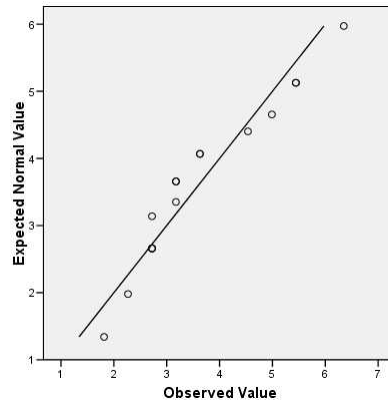
Construir o QQ-plot para a variável diferença



Procedimento usando SPSS

Analyze → Descriptive Statistics → QQ-plot

Exemplo 4.14, pag 184



Dado o reduzido número de pontos no gráfico torna-se difícil concluir quanto à normalidade. No obstante, iremos admitir a distribuição Normal como subjacente às diferenças

Procedimento usando SPSS

Analyze → Compare Means → Paired Samples T Test

Exemplo 4.10, pag 179

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Peso inicial	89,9829	16	15,18296	3,79574
	Peso final	86,3257	16	15,19907	3,79977

Paired Samples Correlations

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Peso inicial & Peso final	16	,996	,000

Paired Samples Test

		Paired Differences			99% Confidence Interval of the Difference		t	df	Sig. (2-tailed)
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	Peso inicial - Peso final	3,65715	1,30910	,32728	2,69276	4,62154	11,175	15	,000

O intervalo de confiança a 99%:
(2.69, 4.62)

Paired Variables: peso i --peso f
Teste unilateral à direita

$H_0 : \mu_D = 0$ vs. $H_1 : \mu_D > 0$

Grau de Confiança: 99%

Nível de Significância: $\alpha = 0.01$

Para obter o p-value unilateral devemos dividir o p-value bilateral por 2 pois as amostras apontam no sentido da hipótese alternativa (a média das diferenças é $3.66 > 0$)
 $\Rightarrow$ p-value unilateral = $0 / 2 = 0 < \alpha = 0.01$
 $\Rightarrow$ rejeitar a hipótese nula para q.q. nível de significância

CONCLUIR: a diferença de pesos médios antes e depois da dieta se pode considerar positiva



Referências

Livro: Grande Maratona de Estatística no SPSS
Andreia Hall, Cláudia Neves e António Pereira
Capítulo 4.2. Testes de Hipóteses Paramétricos

Acetatos:

- Testes de Hipóteses II
[Andreia Hall](#)
URL: <http://www2.mat.ua.pt/pessoais/AHall/me/files/TH2006.pdf>